

实验背景

由于地球不是完整的球型，精确测量重力加速度，特别是研究重力加速度的分布，在勘察地下资源，提高导弹和卫星精度等应用领域具有十分重要的意义。

1.自由落体法测重力加速度

实验目的

仅在重力作用下，物体由静止开始数值下落的运动成为自由落体运动。本实验让同学们掌握：

- 利用自由落体测量本地重力加速度 g ；
- 掌握作图+最小二乘法处理实验数据的方法。

实验原理

根据牛顿运动定律，自由落体运动方程为：

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

其中 h 是下落距离， t 是下落时间。

本实验用卷尺测 h ，采用双光电门法测 t ，装置见图1。光电门1的位置固定，即小球通过光电门1时的速度 v_0 保持不变，小球通过光电门1与2的高度差为 h_1 ，时间差为 t_1 ，分别六次改变光电门2的位置，则有：

$$h_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2}gt_1^2$$

.....

$$h_6 = v_0 t_6 + \frac{1}{2}gt_6^2$$

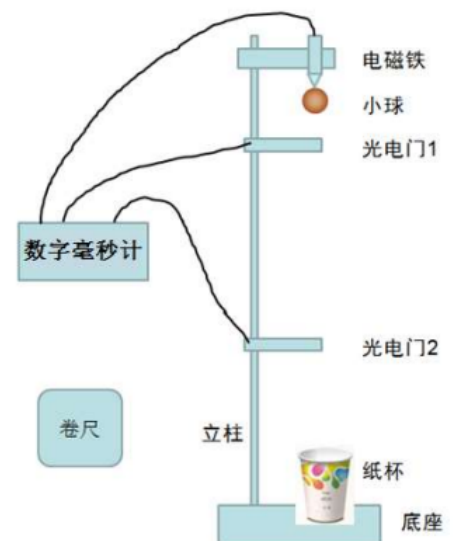
两端同时除以 t_i 得：

$$\bar{v}_1 = \frac{h_1}{t_1} = v_0 + \frac{1}{2}gt_1$$

.....

$$\bar{v}_6 = \frac{h_6}{t_6} = v_0 + \frac{1}{2}gt_6$$

测出一系列 \bar{v}_i ，用线性拟合求出当地重力加速度 g 。



实验仪器

钢卷尺，光电门×2，数字毫秒记，立柱，底座，电磁铁，小球，纸杯。

测量记录

自由落体测重力加速度实验原始数据表			
$h/m/s$	$t'/m/s$	$t''/m/s$	tm/s
35.01	256.8	370.1	113.3
	256.0	369.3	113.3
	257.0	370.4	113.4
40.03	256.9	383.4	126.5
	257.1	383.5	126.4
	256.6	383.0	126.4
45.15	257.2	396.5	139.3
	256.7	396.1	139.4
	257.0	396.4	139.4
50.02	256.7	408.8	152.1
	256.9	409.1	152.2
	256.7	408.9	152.2
60.13	257.5	438.8	176.3
	256.4	432.6	176.2
	256.9	432.2	176.3
65.04	256.9	444.8	187.9
	256.8	444.7	187.9
	257.0	444.8	187.8

数据与讨论

1. 数据处理

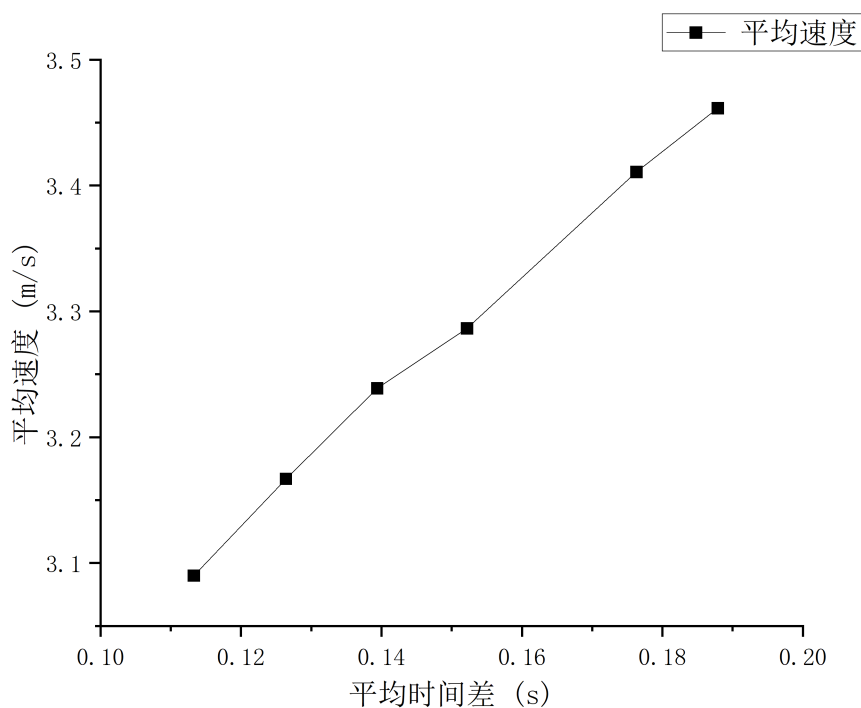
先根据表中数据算出每一组实验的平均时间差 t_i ：

t_1/s	t_2/s	t_3/s	t_4/s	t_5/s	t_6/s
113.3	126.4	139.4	152.2	176.3	187.9

再算出每一组实验的平均速度 \bar{v}_i :

$\bar{v}_1/\text{m/s}$	$\bar{v}_2/\text{m/s}$	$\bar{v}_3/\text{m/s}$	$\bar{v}_4/\text{m/s}$	$\bar{v}_5/\text{m/s}$	$\bar{v}_6/\text{m/s}$
3.0900	3.1669	3.2389	3.2865	3.4107	3.4614

接下来做出 \bar{v}_i 和 t_i 的关系图:



然后对 \bar{v}_i 和 t_i 做最小二乘法处理线性拟合:

设 $\bar{v} = mt + n$

$$m = \frac{\overline{t \cdot \bar{v}} - \bar{t} \cdot \bar{\bar{v}}}{\overline{t^2} - \bar{t}^2}$$

其中:

$$\bar{t} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 t_i \quad \bar{\bar{v}} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \bar{v}_i \quad \overline{t \cdot \bar{v}} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 t_i \cdot \bar{v}_i \quad \overline{t^2} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 t_i^2$$

带入数据得:

$$\frac{1}{2}g = m = \frac{\overline{t \cdot \bar{v}} - \bar{t} \cdot \bar{\bar{v}}}{\overline{t^2} - \bar{t}^2} = 4.9171\text{m/s}^2$$

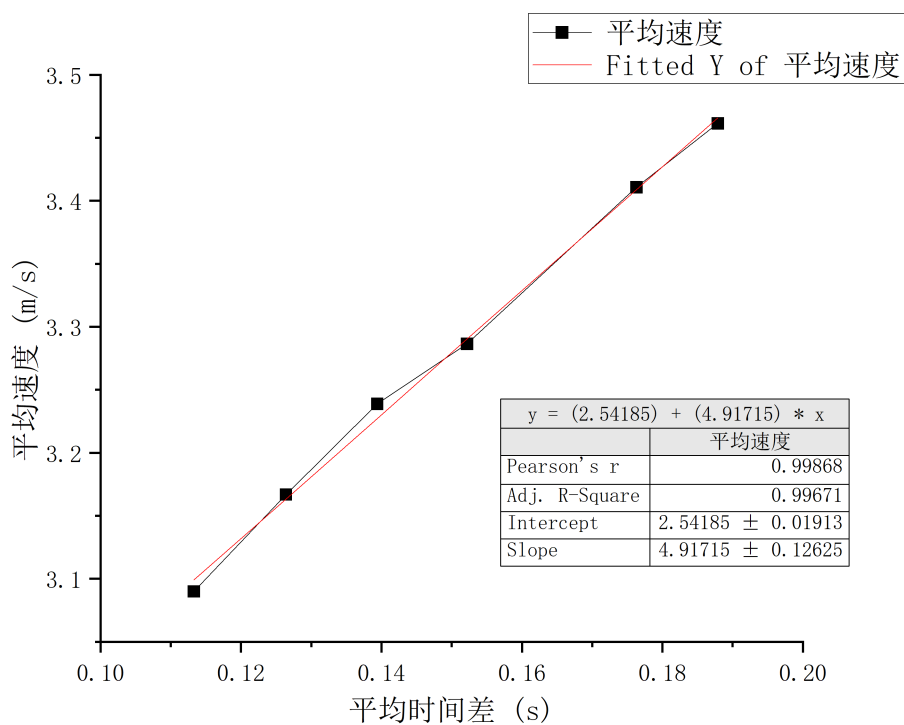
$$\Rightarrow g = 9.8342\text{m/s}^2$$

$$n = \bar{v} - m\bar{t}$$

带入数据得：

$$n = \bar{v} - m\bar{t} = 2.5418\text{m/s}$$

可以根据所得数据画出线性回归图像：



2.误差分析

线性回归系数：

$$r = \frac{\overline{t \cdot v} - \bar{t} \cdot \bar{v}}{\sqrt{[t^2 - (\bar{t})^2] [\bar{v}^2 - (\bar{v})^2]}}$$

其中：

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \bar{v}_i^2$$

代入数据得：

$$r = \frac{\overline{t \cdot v} - \bar{t} \cdot \bar{v}}{\sqrt{[\overline{t^2} - (\bar{t})^2] [\overline{v^2} - (\bar{v})^2]}} = 0.99868$$

斜率 m 得标准差为：

$$s_m = |m| \sqrt{\left(\frac{1}{r^2} - 1\right) / (n - 2)}$$

代入数据得：

$$s_m = |m| \sqrt{\left(\frac{1}{r^2} - 1\right) / (n - 2)} = 0.12625 \text{m/s}^2$$

斜率 b 得标准差为：

$$s_b = \sqrt{\bar{t}^2} \cdot s_m$$

代入数据得：

$$s_b = \sqrt{\bar{t}^2} \cdot s_m = 0.019132 \text{m/s}$$

思考题

1. 因为实际生活中，时间 t 的测量精度不高。
2. 光电门1和光电门2的距离应该尽量远一些。
3. 小车置于平面上，前端挂重物，后挂纸袋，连接打点计时器，重物自由落体带动小车向前移动，打点计时器在纸带上打下若干点，根据点列计算重力加速度。

2.单摆测重力加速度

实验目的

利用单摆测量重力加速度，对于加速度的测量精度更高。本实验让同学们掌握：

- 利用单摆测量重力加速度；
- 利用不确定度均分原理对数据进行不确定度分析。

实验原理

理想的单摆是一根没有质量，没有弹性的线，系住一个没有体积的质点，在真空中由于重力作用而在与地面垂直的平面内做摆角趋于零的自由震动。这种理想的单摆，实际上是不存在的。现实中，悬线有质量，有弹性，摆球有体积摆角不为零，摆球运动受到空气质量影响。

单摆的周期公式为：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} + \left[1 + \frac{d^2}{20l^2} - \frac{m_0}{12m} \left(1 + \frac{d}{2l} + \frac{m_0}{m} \right) + \frac{\rho_0}{2\rho} + \frac{\theta^2}{16} \right]}$$

而摆球的几何形状、摆线的质量、空气浮力、摆角($\theta < 5^\circ$)对 T 的修正都小于 10^{-3} 。在本次实验要求范围内，因而可以忽略不记，在这种近似下，单摆的周期公式可以简化为：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

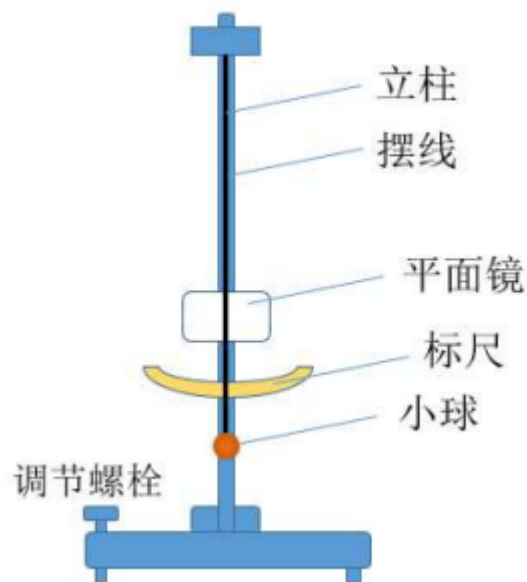
化简得重力加速度计算公式为：

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

因此可以通过测量 l 与 T ，带入公式求出重力加速度 g 。

实验仪器

钢卷尺、电子秒表、单摆（带标尺、平面镜）。
（装置见右图）



测量记录

单摆测重力加速度原始数据表	
l/cm	$nT/\text{s} (n = 55)$
71.10	93.15
71.20	92.38
71.00	94.31
70.69	93.56
71.01	93.07
71.03	93.09

数据与讨论

1. 数据处理

摆长 l 的平均值:

$$\bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i = \frac{71.10 + 71.20 + 71.03 + 71.00 + 70.69 + 71.01}{6} \text{ cm} = 71.005 \text{ cm}$$

周期 T 的平均值:

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1.6936 + 1.6796 + 1.7147 + 1.7011 + 1.6922 + 1.6925}{6} \text{ s} = 1.6956 \text{ s}$$

粗算 g 为:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4 \times \pi^2 \times 0.71005}{1.6956^2} \text{ m/s}^2 = 9.7499 \text{ m/s}^2$$

2. 误差分析

摆线长度 l 的标准差:

$$\begin{aligned} \sigma_l &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l})^2} \\ &= \sqrt{\frac{(71.10 - 71.005)^2 + \dots + (71.03 - 71.005)^2}{6-1}} \text{ cm} \\ &= 0.17144 \text{ cm} \end{aligned}$$

摆长 l 的B类不确定度:

$$\Delta_{B,l} = \sqrt{\Delta_{\text{仪}}^2 + \Delta_{\text{估}}^2} = \sqrt{0.2^2 + 0.05^2} \text{ cm} = 0.20616 \text{ cm}$$

摆长 l 的扩展不确定度是:

$$\begin{aligned} U_{l,P} &= \sqrt{\left(t_P \frac{\sigma_l}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(k_P \frac{\Delta_{B,l}}{C}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(2.78 \times \frac{0.17144}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(1.96 \times \frac{0.20616}{3}\right)^2} \text{ cm} \\ &= 0.22471 \text{ cm}, P = 0.95 \end{aligned}$$

周期 T 的标准差:

$$\begin{aligned} \sigma_T &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2} \\ &= \sqrt{\frac{(1.6936 - 1.6956)^2 + \dots + (1.6925 - 1.6956)^2}{6-1}} \text{ s} \\ &= 0.011625 \text{ s} \end{aligned}$$

周期 T 的B类不确定度:

$$\Delta_{B,T} = \sqrt{\Delta_{\text{仪}}^2 + \Delta_{\text{估}}^2} = \sqrt{0.01^2 + 0.2^2} \text{ s} = 0.20024 \text{ s}$$

周期 T 的展伸不确定度:

$$\begin{aligned} U_{T,P} &= \sqrt{\left(t_P \frac{\sigma_T}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(k_P \frac{\Delta_{B,T}}{C}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(2.78 \times \frac{0.011625}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(1.96 \times \frac{0.20024}{3}\right)^2} \text{ s} \\ &= 0.012427 \text{ s}, P = 0.95 \end{aligned}$$

重力加速度 g 的延伸不确定度:

$$\begin{aligned}U_{g,P} &= \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial L}U_{L,P}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}U_{T,P}\right)^2} \\&= \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2}U_{L,P}\right)^2 + \left(-\frac{8\pi^2 L}{T^3}U_{T,P}\right)^2} \\&= \sqrt{\left(\frac{4 \times \pi^2}{1.6956^2} \times 0.0022471\right)^2 + \left(-\frac{8 \times \pi^2 \times 0.71005}{1.6956^3} \times 0.012427\right)^2} \text{ m/s}^2 \\&= 0.14454 \text{ m/s}^2, P = 0.95\end{aligned}$$

重力加速度的最终结果:

$$g = (9.75 \pm 0.14) \text{ m/s}^2$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{U_{L,P}}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{U_{T,P}}{T}\right)^2} = 0.1\%$$

思考题

1. 误差主要来源可能是:

- 1) 释放小球的方向未能与摆面在同一平面内, 导致形成圆锥摆。
- 2) 摆锤摆动幅度大于 5° 。
- 3) 用钢卷尺测量摆长时没有对齐。
- 4) 摆线上端点位置不定, 随摆动而变化。

致谢

感谢大学物理实验中心王中平老师。